El Status Ontológico de los Números en la Aritmética[1]

Dino Ventura Rubio*
Universidad de Valparaíso

Resumen

El articulo introduce al actual debate sobre filosofia de la matemática, a partir de la postura estructuralista de Benacerraf. La postura que intenta defender Benacerraf es que lo importante de los números no es su identificación con algún objeto determinado, sino más bien cómo se relacionan éstos dentro de una estructura determinada.
Primero se evaluará la salida estructuralista de Benacerraf con respecto a su critica de la tesis platónica de los números defendida por Frege y Russell, que interpreta los números como objeto. También evaluaremos la solución platónica empirista Quine Putnam, en el llamado argumento de la indispensabilidad. Finalmente, terminaremos con la critica de Maddy a dicho argumento.
Palabras claves: Números. Estructura. Argumento de la indispensabilidad. Empirista. Conjunto.

Abstract

This work presents the current debate in Philosophy of Mathematics from the persperctive of Benacerra´s structuralist stance. The view defended by Benacerraf is that what is importand about numbers is not thein indetification with some or other determinate object, but how they are related within a structure.
First, the structuralist criticism of Benacerraf to the platonistic thesis defended by Frege and Russell (by which numbers are construed as objects) is evaluated. Then, the work will consider the platonistic- empiriscist solution put forward by Quine and Putnam, known as the "indispensability argument". The paper finishes with Maddy´s criticism to the indispernsability argument.
Key words: Numbers. Structure. Indispensability argument. Empiriscist. Set.

---

* Licenciado y Magister© en Filosofía. Mención: Lógica y Filosofía de las Ciencias, por la Universidad de Valparaíso. Profesor de Lógica y Filosofía de la Universidad Andrés Bello y Universidad de Valparaíso. dinoventurack@yahoo.com

1 Este trabajo fue presentado en las VIII Jornadas Rolando Chuaqui Kettlun, realizado en la Universidad de Santiago de Chile, los días 26, 27 y 28 de abril 2006, y en el V encuentro de AFHIC (Asociación de Filosofía e Historia de la Ciencia del Cono Sur), realizado en el periodo del 22 al 25 de Mayo de 2006, en Florianópolis, SC, Brasil. Agradezco las sugerencias y comentarios que recibí en esa ocasión de mis amigos Dr. José Tomás Alvarado Marambio y del Dr. Wilfredo Quezada Pulido.

En filosofía de las matemáticas se han defendido varias concepciones de número, por ejemplo, la concepción logicista defendida por Gottlob Frege y Bertrand Russell, la estructuralista defendida por Paul Benacerraf y la concepción platónico- empirista de W. Van Orman Quine- Hilary Putnam.

Como es sabido, el logicismo, desarrollado por Frege y Russell principalmente, sostiene que la aritmética se reduce a la lógica. Para ellos el número es un objeto independiente. Para Frege y también para Russell, el número tres, por ejemplo, es entendido como un conjunto de conjuntos: el conjunto de *todos* los conjuntos con la propiedad de *treidad*. Esta puede parecer una definición circular. Para evitar dicha circularidad, Frege y Russell, utilizan la relación biunívoca, o relación de equinumerosidad. Por ejemplo, 0 es el número de las clases que no tienen ningún miembro (clase nula); 1 es el número de clases que tienen un solo miembro; 2 es el número de clases que tienen dos miembros, y así sucesivamente.

Una crítica radical a dicha concepción, y ahora considerada clásica, es aquella formulada por P. Benacerraf, mediante un complejo argumento, mediante el cual critica cualquier definición de los números basada en conjuntos o nociones extensionales semejantes.

Para explicar esto tomemos el siguiente ejemplo de Frege: el número 3 es la extensión del concepto "equivalente con un conjunto de tres miembros". La concepción anterior es correcta, en la medida que las palabras numéricas (numerales) son predicados de la clase, que define el número. Para Frege, al decir que hay un número *n* de F, uno está predicando n-idad de F, así como al decir que azul es un color se esta predicando coloridad del azul.

Ilustrando lo anterior considérese el siguiente ejemplo:

1) Hay diecisiete leones en el zoológico.

Con aquella oración no podemos decir que estamos predicando diecisietidad de cada león en particular, sino sólo que hay diecisiete leones; estos diecisiete leones y estos diecisiete tigres están juntos en una clase. Debido a que la palabra de número puede variar de posición podemos tener la siguiente oración a partir de (1).

2) Los leones en zoológico son diecisiete.

Para Benacerraf si no interpretamos a (2) como una sentencia sobre las edades de las bestias, cosa que en castellano no tiene sentido, pero en inglés sí[2], entonces ella no predica algo de cualquier león en particular. Esta oración podría analizarse usando la tradicional dicotomía de sujeto y predicado. Como sujeto aparece "los leones en el zoológico" y como predicado "son diecisiete", lo que parece paralelo a la sentencia:

3) los unicornios están desapareciendo.

Sin embargo, fácilmente podemos darnos cuenta que el paralelo es efímero, que (2) se puede entender como:

4) los leones en el zoológico son diecisiete en número.

De lo cual parece derivarse algo como:

5) diecisiete leones están en el zoológico.

Benacerraf no pretende explorar la gramática de palabras de número en todo su detalle; nos dice que el uso de esas palabras en los cinco casos anteriores difieren en muchos aspectos importantes de palabras que nosotros no dudamos en llamar predicados.

Pareciera que aquí no hay ocurrencias de palabras numéricas en una posición predicativa no típica, es decir, en "es (es)..."

6) los cinco pequeños encantadores azulejos cuadrados verdes;

La frase en (6) está bien; pero si (en inglés) cambiamos la posición de "cinco" se produce una cadena agramatical y mientras más a la derecha sea el cambio, será peor.

Ahora bien, que las palabras numéricas no son predicativas se puede ver en el análisis lógico estándar de sentencias como (1) de más arriba, que se reformular usando notación lógica de primer orden en (7).

7) $(\exists x_1) \ldots (\exists x_{17})(Lx_1 \cdot Lx_2 \cdot \ldots \cdot Lx_{17} \cdot x_1 \neq x_2 \cdot x_1 \neq x_3 \ldots.$

$\cdot\, x_{16} \neq x_{17} \cdot (y)(\mathrm{l}y \supset .\ y = x_1 \lor y = x_2 \lor \ldots \lor y = x_{17}))$.

Si tratáramos de analizar la fórmula anterior podemos ver que el predicado "el león está en el zoológico" es lo único que permanece; mientras que "diecisiete" da lugar a un gran número de cuantificadores,

2 En inglés se puede dar esa interpretación, pero en castellano es imposible, ya que en la traducción se puede interpretar solamente que hay diecisiete leones en el zoológico.

funciones de verdad, variables y ocurrencias de "=". De esto se sigue claramente que es muy difícil decir que las sentencias del 1 al 7 puedan predicar diecisieteidad de la clase de los leones en el zoológico.

Benacerraf se pregunta qué apoyo tiene la visión anterior. Y sugiere como respuesta la siguiente: si dos clases tienen cada una diecisiete miembros, probablemente exista una clase que las contenga a ambas. Benacerraf dice "probablemente" porque lo anterior varía de teoría de conjuntos a teoría de conjuntos. No obstante, este no es el caso de la teoría de los tipos de Russell, ya que de acuerdo a esa teoría, las dos clases anteriores tienen que ser del mismo tipo. Según Benacerraf, no puede existir una teoría consistente y que contenga una clase de todas las clases con diecisiete miembros, ya que la existencia de paradojas es ella misma una buena razón para negarle a diecisiete este rol unívoco de designar las clases de todas las clases con diecisiete miembros[3].

Así, Benacerraf concluye que diecisiete no puede ser considerado como predicado de clases, y por tanto no hay necesidad de ver 3 como el conjunto de todos los tríos.

De esto se podría seguir, con Benacerraf, que no hay un conjunto tal como los números, ya que no tenemos ninguna razón poderosa para decir que 3 es realmente un conjunto. Y por ello que los demás números no pueden ser en absoluto conjuntos.

El punto entonces es saber en qué se basa Benacerraf para concluir esto, para decir que los números no son conjuntos. Para ello concentrémonos en lo siguiente:

Nuestro autor nos invita a examinar la relación de identidad propuesta por Frege. Expresiones tales como [n = s] donde n representa una expresión numérica, y s una expresión de conjuntos, por ejemplo, 3=[[[∅]]]. No tienen sentido, ya que los enunciados de identidad son solo posibles en contextos donde se puede individualizar a los objetos. Una expresión del tipo $x = y$, solo tiene sentido si podemos determinar si dos objetos, por ejemplo postes (árboles o piedras, etc.), son idénticos, esto es, si podemos predicar lo mismo de ambos, a saber, su color, su masa, tamaño, etc. Sin embargo, para determinar si dos números son iguales, no podemos recurrir al mismo tipo de predicados, sino que habría que

3 *Cfr.* Paul Benacerraf, "What Numbers Could Not Be", en *Philosophy of Mathematics*, 2 Ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1983, pág. 288.

determinar si son mayores que 17, si son números primos, etc. Es decir, lo que se predica de los objetos físicos no se puede predicar de los números, y viceversa; ya que lo que determina que algo es un poste individual no sirve para individualizarlo como un número particular. Lo que se quiere realmente decir con lo anterior es que las preguntas de identidad de una "entidad" particular no tienen sentido, ya que la expresión "entidad" es demasiado amplia.

Lo que hemos hecho hasta ahora es ver las dificultades del planteamiento de Frege. Ahora pasaremos a evaluar la explicación que nos da Benacerraf de porqué los números no podrían ser conjuntos en absoluto.

Supongamos que un filósofo afirma que 3=[[[Ø]]]. Él puede decir que existe una diferencia entre aseverar que tres es el conjunto de todos los tríos e identificar 3 con aquel conjunto. Lo último es lo que debería hacerse en el contexto de una explicación. No se trata de identificar 3 con cualquier cosa. Para Benacerraf, identificar 3 con algún conjunto en particular se hace con el propósito de presentar alguna teoría, y no para postular que se ha descubierto cuál objeto es realmente el número 3. Así cualquier sistema de objetos, conjuntos o no, que forme una progresión recursiva, puede servir para este propósito. Descubrir que un sistema diferente hará el trabajo de los números no significa descubrir cuales objetos son los números.

Esto significa que – como se dijo anteriormente - cualquier sistema de objetos, conjunto o no, que forma una progresión recursiva, puede ser adecuada para explicar los números. Entonces lo que importa realmente, según el autor, no es cualquier condición sobre objetos, sino la condición sobre la relación bajo la cual ellas forman una recursión. En otras palabras, lo importante son las relaciones como "menor que," "mayor que", etc., porque con ellas se forma una relación recursiva. No es relevante qué sea cada secuencia recursiva, ni la individualidad de cada elemento, sino la estructura que forman conjuntamente. Con lo anterior se podría pensar que la cuestión de si un "objeto" particular [[[Ø]]] es el adecuado como reemplazo para el número tres es absurda. Los "objetos", según Benacerraf, no hacen el trabajo de los números por sí solos, sino que es el sistema el que realiza la labor o, si no, nada lo hace. Por consiguiente, Benacerraf sostiene que los números no pueden ser conjuntos, y por lo tanto no pueden ser "objetos", porque no hay razón para identificar los números con algún objeto particular o con cualquier otro (sin saber si es un número).

Los números no son objetos ya que se relacionan con una estructura abstracta, y los "elementos" de la estructura no tienen propiedades más que aquellas que los relacionan con otros elementos de la misma estructura. Si se identifica la estructura abstracta con un sistema de relaciones, se puede obtener la aritmética elaborando las propiedades de la relación "menor que", o de todos los sistemas de objetos, esto es, estructuras concretas, exhibiendo aquella estructura abstracta. Así, Benacerraf nos dice: "Que un sistema de objetos exhiba la estructura de los enteros implica que los elementos de ese sistema tienen algunas propiedades que no dependen de la estructura. Debe ser posible individualizar esos objetos independientemente del papel que juegan en esa estructura. Pero es precisamente eso lo que no se puede hacer con los números."[3] En una estructura abstracta, cualquier elemento puede ser el número 3; no porque sea precedido por 2 y 1, y seguido por 4 y 5, sino porque representa la relación que todo tercer miembro de una progresión trae con el resto de la progresión.

Por lo tanto, según Benacerraf, la aritmética es la ciencia que produce la estructura abstracta que todas las progresiones tienen en común en virtud de ser progresiones. De ahí que en su argumento, no sea una ciencia que se ocupe de objetos particulares – los números. Puesto que intentar establecer cuáles objetos particulares independientemente identificables son los números sea una búsqueda sin sentido.

Precedentemente se ha expuesto la concepción benacerrafiana del número, que parece plantear un problema sin solución a cualquier concepción objetual de los números, y en particular, a cualquier criterio de compromiso ontológico con ellos. Sin embargo, W. Quine y H. Putnam han sugerido una vía de solución inesperada a este desafío, que en principio, nos lleva a aceptar la realidad de las entidades matemáticas sin que tengamos que apelar a criterios independientes de nuestro esquema conceptual natural. Esta es la llamada tesis de la indispensabilidad en matemáticas.

---

3 *Op. Cit.*, pág. 291.

El argumento de la indispensabilidad de Quine y Putnam se puede esquematizar formalmente de la siguiente manera:

1) Debemos asumir compromiso ontológico con las entidades que son indispensables a nuestras mejores teorías científicas.

2) Las entidades matemáticas son indispensables a nuestras mejores teorías científicas.

3) Debemos asumir compromiso ontológico con las entidades matemáticas.

Podemos darnos cuenta fácilmente que la primera premisa nos está diciendo que las entidades abstractas (por ejemplo las moléculas) son necesarias en las teorias cientificas. En cambio la segunda premisa nos está diciendo algo diferente. Ésta dice que las entidades matemáticas son necesarias para las teorías científicas (por ejemplo la física). Así podemos concluir que hay dos argumentos de la indispensabilidad. Uno que afirma que son indispensables las entidades matemáticas para las ciencias físicas, y el otro que afirma que las entidades abstractas son indispensables tanto para la matemática como la física.

Nosotros nos vamos a referir al segundo argumento de la indispensabilidad. Para Quine, los objetos físicos son llevados conceptualmente a la física como intermediarios convenientes y no en términos de la experiencia, sino simplemente como postulados (*posits)* irreducibles. Estos postulados podrían ser comparados epistemológicamente con los dioses de Homero (aunque Quine no crea en estos últimos). Así para Quine, los dioses y los objetos físicos desde un punto de vista epistemológico tienen sólo una diferencia en el grado y no en el tipo. Lo que realmente quiere decir Quine es que tanto los postulados físicos como abstractos tienen un mismo nivel epistemológico y sólo se diferencian en los grados en que ellos facilitan nuestra relación con las experiencias del sentido.[5]

Según Quine, lo natural en nuestra percepción del mundo es despreciar a las entidades abstractas, como las moléculas, y preferir los cuerpos o estructuras del sentido común. Sin embargo, para Quine lo anterior no es algo garantizado, ya que la evidencia que tenemos de la existencia de los cuerpos del sentido común es la misma que tenemos

5 *Cfr.*, W.V. O. Quine, "Two Dogmas of Empiricism", reproducido en *From a Logical Point of View*, New York: Harper & Row, 1963, pág. 45.

de la evidencia de las moléculas. En otras palabras, los cuerpos y las moléculas son postulados del físico para organizar nuestras respuestas frente a los estímulos. De esta manera, cobra sentido el famoso *dictum* de Quine "Ser es ser el valor de una variable". En otras palabras, las entidades abstractas son asumidas dentro de una teoría y cobran existencia sólo dentro de ella. Fuera de ella, las moléculas y las clases no tienen ningún sentido. Sólo tienen sentido en la teoría física y en la teoría matemática respectivamente. Esto debido a que para Quine, sólo deben admitirse aquellas entidades para las que se puedan proporcionar criterios adecuados de identidad; y los números y las moléculas sólo tendrían criterios adecuados de identidad cuando son considerados en el contexto de sus respectivas teorías. Así él nos dice que "los números y las clases tienen a su favor el poder y la facilidad que aportan a la física teórica y otros discursos sistemáticos sobre la naturaleza".[6]

Así, podemos darnos cuenta fácilmente que lo central del argumento de la indispensabilidad es que las entidades abstractas con que trabajan las ciencias tienen que estar dentro de una teoría, y se vuelven indispensables en la medida que son aplicables (aplicación matemática).

En este punto son relevantes las críticas de Penélope Maddy al argumento, formuladas en 1992 en un articulo llamado *Indispensability and Practice*. Aunque Maddy está de acuerdo en las líneas generales del argumento de Quine, su crítica va dirigida principalmente si él es compatible efectivamente con la práctica matemática. Maddy parece aceptar que tenemos razón al creer en las entidades abstractas de la matemática, porque ellas son indispensables en la ciencia física. Pero Maddy se pregunta: "¿qué pasa con las matemáticas que no figuran en las aplicaciones?".[7]

Pues si consideramos a la matemática sólo en cuanto a su aplicabilidad, como pretende Quine, es válido preguntarse qué pasaría, por ejemplo, con cantidades como los cardinales inaccesibles ($\beth_\omega$)[8] De acuerdo al argumento de Quine, serían ilegítimos para la matemática, ya que no

6 W V O Quine, *La Relatividad Ontológica y otros Ensayos*, Madrid, España. Tecnos, 1974, pág. 128
7 Penélope Maddy, "Indispensability and Practice", *The Journal of Philosophy*, v. LXXXIX, N 6, Junio 1992, pág. 278.
8 α es un cardinal inaccesible si y solo si:
i) $\alpha > \omega (\omega = \aleph_0)$
ii) α es un cardinal regular.
iii) $K < \alpha \rightarrow 2^K < \alpha$.
Los cardinales inaccesibles pertenecen a los *cardinales grandes* que deben ser postulados por axiomas conjuntistas no- habituales (por ejemplo, el axioma de infinitud o el de existencia de cardinales inaccesibles.)

tienen aplicabilidad. Esto replica, según Maddy, que el argumento de la indispensabilidad rechaza nuestras prácticas matemáticas aceptadas sobre bases no matemáticas. Aunque Maddy acepta junto con Quine, que la parte aplicada de las matemáticas tiene que ser considerada parte de la ciencia en acuerdo con los principios naturalistas. Ella ve una discrepancia entre las matemáticas aplicadas y la práctica, ya que los matemáticos no creen que los teoremas de la teoria de los números y el análisis sean aceptables porque son útiles en aplicaciones, sino más bien, creen en éstos en el sentido de que pueden ser probados desde axiomas apropiados. Asi, los teóricos de números y los analistas, para sostener la adopción de estos axiomas, recurren a la intuición matemática o a la sistematización de la práctica matemática o a otras consideraciones intramatemática. Sin embargo, a juicio de Maddy, ellos no son capaces de citar explicaciones exitosas. Entonces el problema que se plantea es que la indispensabilidad no sólo vuelve engañosas las matemáticas no aplicadas, sino que confunde la realidad metodológica de las matemáticas que se aplican.

Pero qué pasa con el argumento de la indispensabilidad, se pregunta Maddy, en relación con la práctica de la ciencia natural, especialmente la física. El argumento de la indispensabilidad nos habla de una teoria científica T, confirmada por los medios apropiados, con todas sus partes a la par con lo ontológico y lo epistémico. Así la confirmación empírica se aplica a la matemática y la física. Como se sabe, al respecto Quine sostiene un holismo que se expresa en las siguientes palabras: "nuestras afirmaciones sobre el mundo externo enfrentan al tribunal de la experiencia sensorial no en forma individual sino como un cuerpo estructurado".[9]

Maddy no intenta criticar el holismo de Quine[10]. Sin embargo, según ella, la práctica de la ciencia es diferente. Ella nos dice que hay varias actitudes posibles para los componentes de teorias bien confirmadas, que van desde la creencia, la tolerancia, hasta el rechazo. La teoria atómica, por ejemplo, fue bien confirmada para los estándares filosóficos. No obstante, algunos científicos se mantuvieron escépticos. Ellos no proponían eliminar los átomos de, por ejemplo, la teoria química, sino que sostenían que deberían creerse las consecuencias directamente

---

9 *Op. Cit.*, p. 280. Esta cita es extraída de P. Maddy.
10 Quine por holismo entiende la perspectiva que las teorias son confirmadas o disconfirmadas como un todo. Así, si una teoria es confirmada por hallazgos empíricos, la teoria entera es confirmada. A este tipo de holismo Quine también lo llama holismo confirmacional.

verificables de la teoría atómica, cualquiera fuera el poder de la explicación atomista o las ventajas de pensar con relación a los átomos. Así, la confirmación dada por el éxito experimental sólo se expandió hasta la teoría química T basada en el átomo, sin embargo no a las afirmaciones con respecto a la existencia de los átomos.

Durante nuestro trabajo hemos revisado diferentes concepciones de número, en particular hemos expuesto la crítica de Benacerraf al logicismo y el llamado argumento de la indispensabilidad. Entonces concluimos de que la tesis de Benacerraf es la más satisfactoria, por las siguiente dos razones:

1. Tiene la ventaja de que su definición de número puede ser aplicable tanto a la matemática teórica como a la práctica. Lo que no ocurre con el argumento de la indispensabilidad, siguiendo a Putnam y Quine, en que los números sólo tienen sentido en la práctica matemática.

2. Podemos aceptar la utilidad de las matemáticas para la ciencia sin entrar en consideraciones metafísicas sobre el número, que no tienen ninguna utilidad para la matemática como práctica. La tesis de Benacerraf reúne los dos requisitos con que trabaja la matemática: usar los números en la práctica y hacer teoría numérica.